Sunge, Aswan S., dan Heri Fidiawan. 2019. "Prediksi Produk Laris Mobil Honda dengan Metode Klasifikasi Menggunakan Algoritma C4.5 '(Studi Kasus : Data Penjualan Sales PT Prospect Motor, Cikarang)''.'" *SIGMA - Jurnal Teknologi Pelita Bangsa* 9(4):97–103.

Yulfikar, Muhammad, Uky Yudatama, dan Emilya Ully Artha. 2019. "Prediksi Ketersediaan Stok Kayu Dengan Metode Backpropogation dan Jaringan Kohonen (Studi Kasus UD. Wahyu Nugroho Grabag Magelang)." *Jurnal Komtika* 2(2):115–24. doi: 10.31603/komtika.v2i2.2598

P-ISSN: 2962-3227 | E-ISSN: 2962-3235
Prosiding Seminar Hi-Tech (Vol. 1, No. 1, 2022)
https://ejournal.unuja.ac.id/index.php/hitech

Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi (*HOTS*) dalam Menentukan Matriks Laplace dari Hipergraf Hiper-reguler *C*(*k*,*l*,*n*,*m*)

Diana Putri Prahasti[1], Fajri Maulana[2]

Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Nurul Jadid, Probolinggo, Indonesia[1,2]
(dianaprahasti@gmail.com[1], fajrimaulana636@gmail.com[2])

Abstrak: Perkembangan teknologi dan disrupsi pasca pandemi COVID-19 membuat kita diharuskan mampu beradaptasi. Salah satu bentuk adaptasi paling sederhana adalah berpikir. Berpikir merupakan hal utama yang dilakukan sebelum kita melakukan sesuatu. Keterampilan berpikir dibedakan menjadi keterampilan berpikir tingkat rendah (LOTS) dan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Salah satu keterampilan berpikir yang digalakkan akhir-akhir ini adalah keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Keterampilan ini merupakan salah satu tujuan dalam pembelajaran matematika. Mengembangkan keterampilan ini dapat dilakukan dengan membiasakan diri dalam menyelesaikan permasalahan kompleks yang memerlukan tingkat pemahaman mulai dari aplikasi, analisis, sintesis, evaluasi, dan mencipta. Salah satu permasalahan HOTS yang dikaji disini adalah mengkonstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh bentuk umum matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ melalui tahapan-tahapan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Penelitian ini merupakan penelitian deduktif aksiomatik menggunakan metode pendeteksian pola yang dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif dan terapan. Hipergraf merupakan struktur yang mampu mengubungkan lebih dari 2 titik/verteks. Dengan kata lain, hipergraf adalah generalisasi dari graf. Hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ adalah hipergraf yang dikonstruksi dari suatu graf k −reguler dengan menambahkan l titik di setiap sisi graf tersebut sehingga menjadi hipergraf $(2+l)$-seragam dengan orde $n+lm$ dan ukuran m. Matriks ketetanggaan dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ dapat ditentukan melalui matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya. Selanjutnya, melalui tahapan keterampilan berpikir tingkat tinggi didapatkan bahwa bentuk umum matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ dapat ditentukan melalui matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya juga. Matriks *signless* Laplace, matriks Seidel, dan keintegralan merupakan bahan yang menarik untuk dikaji selanjutnya.

Kata kunci: *Hipergraf; Hiper-reguler; HOTS; Matriks Laplace, Taksonomi Bloom*

Abstract. Technological developments and post pandemic COVID-19 disruptions forced us to adapt. One of the simplest forms of adaptation is thinking. Thinking is the main thing before we do something. Thinking skill is divided into lower order thinking skills (LOTS) and higher order thinking skills (HOTS). One of the thinking skills that have been promoted recently is higher order thinking skills (HOTS). This skill is one of the goals in mathematics learning. Developing these can be done by getting used to solving complex problems that require a level of understanding ranging from application, analysis, synthesis, evaluation, and creation. One of the HOTS problems studied here is constructing the Laplacian matrix of hyper-regular hypergraph $C(k,l,n,m)$. The purpose of this study is to obtain the general form of the Laplacian matrix of hyper-regular hypergraph $C(k,l,n,m)$ through the stages of higher order thinking skills. This research is an axiomatic deductive research by using pattern recognition which is categorized into exploratory and applied research. Hypergraph is a structure that capable of connecting more than 2 points/vertices. In other words, a hypergraph is a generalization of a graph. Hyper-regular hypergraph $C(k,l,n,m)$ is a hypergraph constructed from a k −regular graph by adding l points on each side of the graph so that it becomes a $(2+l)$-uniform hypergraph with order $n+lm$ and size m. The adjacency matrix of hyper-regular hypergraph $C(k,l,n,m)$ can be determined by the adjacency matrix and the incidence matrix of its k −regular graph. Furthermore, through the stages of higher order thinking skills, it was found that the general form of the Laplacian matrix of hyper-regular hypergraph $C(k,l,n,m)$ can be determined by the adjacency matrix and the incidence matrix of its k −regular graph as well. Signless Laplacian matrix, Seidel matrix, and the integral of hypergraph are interesting materials to be studied further.

Keywords: *Bloom Taxonomy; Hypergraph; Hyper-regular; HOTS; Laplacian Matrix*

Pendahuluan

Perkembangan zaman yang tidak terbendung dan disrupsi pasca pandemi covid-19 membuat kita sebagai manusia dituntut untuk mampu beradaptasi. Berpikir adalah bentuk adaptasi sebelum melakukan suatu tindakan. Menurut Widyastuti (2015), berpikir adalah proses mengolah pengetahuan yang sudah ada untuk digunakan dalam membuat kesimpulan ketika dihadapatkan suatu informasi baru. Sejalan dengan itu Purwanto, dkk. (2019) menjelaskan bahwa berpikir adalah proses dinamis yang dialami setiap individu ketika dihadapkan pada sesuatu. Proses berpikir dapat dikembangkan melalui pembelajaran matematika. Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang secara jelas membutuhkan proses berpikir dalam menyelesaikan permasalahan yang muncul (Dewy, dkk., 2015). Belajar matematika memerlukan level berpikir yang berbeda-beda dalam menyelesaikan setiap permasalahan yang ada. Menurut Taksonomi Bloom yang telah direvisi oleh Anderson dan Krathwohl (dalam Hakim, dkk.,2021), proses kognitif atau keterampilan berpikir dibedakan menjadi 2 yaitu keterampilan berpikir tingkat rendah (LOTS) dan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Keterampilan berpikir tingkat rendah meliputi kemampuan mengingat (C1), memahami (C2), dan menerapkan (C3). Keterampilan berpikir tingkat tinggi melibatkan analisis dan sintesis (C4), mengevaluasi (C5), dan mencipta (C6). Salah satu tujuan utama pembelajaran matematika adalah dapat terbiasa dalam menggunakan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS).

Maulana dan Yuniawati (2018) menyatakan bahwa salah satu keterampilan yang dikembangkan di abad 21 ini adalah keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Sejalan dengan itu menurut Maylisa, dkk. (2015) salah satu topik yang dapat mengembangkan keterampilan berpikir tingkat tinggi adalah cabang ilmu matematika diskrit khususnya teori graf. Dalam perkembangannya, muncullah teori hipergraf yang merupakan generalisasi dari graf. Pada hipergraf satu sisi (hipersisi) bisa menghubungkan lebih dari dua titik (Putri, 2020). Salah satu manfaat hipergraf adalah mampu menunjukkan hubungan antar-kelompok yang direpresentasikan dengan titik-titik dalam suatu hipersisi.

Sebuah hipergraf berorde n dan berukuran m adalah struktur $H(V, \varepsilon)$, dimana $V = v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah himpunan finit dan $\varepsilon = E_1, E_2, \cdots, E_m$ adalah keluarga dari himpunan bagian V sedemikian hingga,

$$E_i \neq \emptyset$$
$$\cup_{i=1}^{m} E_i = V$$

Elemen $v_1, v_2, \cdots, v_n$ disebut titik/vertex dan himpunan $E_1, E_2, \cdots, E_m$ disebut hipersisi (Astuti, 2014). Suatu hipergraf dapat direpresentasikan ke dalam suatu matriks. Beberapa diantaranya yaitu matriks ketetanggaan, matriks Laplace, dan lain-lain. Pada paper ini akan dikaji salah satu jenis hipergraf seragam yaitu hipergraf hiper-reguler dengan fokus pada matriks ketetanggaan dan matriks Laplacenya.

Untuk $k \geq 2, l \geq 1, m \geq 3, n \geq 3$, dan $k, l, m, n \in$ himpunan bilangan asli. Jika Γ adalah graf k −reguler berorde n dan berukuran m. Hiper-reguler $C(k, l, n, m)$ adalah hipergraf $(2 + l)$ −seragam berorde $n + lm$ dan berukuran m, yang diperoleh dari penambahan l titik pada setiap sisi graf Γ (Maulana, dkk., 2018). Sehingga dapat dikatakan, hiper-reguler adalah perluasan dari sebuah graf k −reguler dengan penambahan titik di setiap sisinya.

Matriks ketetanggaan A (*adjacency matrix*) pada suatu hipergraf adalah matriks persegi yang menyatakan hubungan antara dua vertex yang termuat dalam suatu hipersisi yang sama. Matriks Laplace L adalah pengurangan dari matriks diagonal D yang entri diagonal utamanya adalah derajat dari setiap titik suatu hipergraf dengan matriks ketetanggaan A. Secara matematis bisa dituliskan sebagai berikut:

$$L = D - A.$$

Metode

Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik, metode pendeteksian pola yang dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif dan terapan. Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menentukan pengertian dasar matriks ketetanggaan dan matriks diagonal pada hipergraf hiper-reguler $C(k, l, n, m)$. Selanjutnya menentukan teorema untuk menentukan matriks Laplacenya menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*). Penelitian ini juga menggunakan tahapan level berpikir tingkat tinggi oleh Bloom yang meliputi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi dan menciptakan.

Hasil dan Pembahasan

Hasil dari penelitian ini adalah bentuk umum matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yang diperoleh dengan pendekatan matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya. Proses penemuannya melalui tahapan proses berpikir tingkat tinggi sesuai dengan taksonomi bloom yang telah direvisi.

Tahap pertama yaitu mengingat (C1), pada tahap ini peneliti mengingat kembali definisi dari graf reguler karena hal ini terkait dengan konstruksi hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yang akan dicari matriks Laplacenya. Menurut Chartrand dan Lesniak (2000: 6), graf reguler didefinisikan sebagai graf yang setiap titiknya memiliki jumlah ketetanggaan yang sama dengan titik lainnya. Dengan kata lain, suatu graf dikatakan reguler jika derajat dari setiap titik v pada suatu graf G adalah sama (misal r),

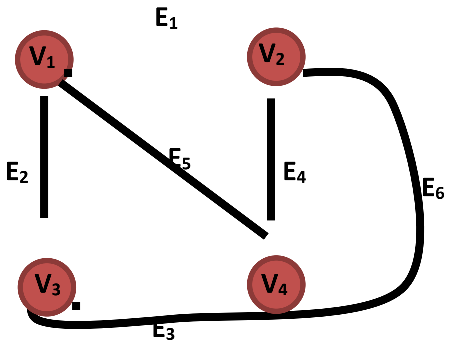
$$d(v) = r, \forall v \in G,$$

dimana;

$d(v)$: derajat titik v.

Tahap kedua yaitu memahami (C2), peneliti memahami bahwa setiap graf dapat direpresentasikan ke dalam matriks. Oleh sebab itu, peneliti mencoba menggali dua matriks yang akan digunakan disini yaitu matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari suatu graf k −reguler. Matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan ini berguna dalam konstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Berikut salah satu contoh graf 3-reguler beserta matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitannya.

P-ISSN: 2962-3227 | E-ISSN: 2962-3235
Prosiding Seminar Hi-Tech (Vol. 1, No. 1, 2022)
https://ejournal.unuja.ac.id/index.php/hitech

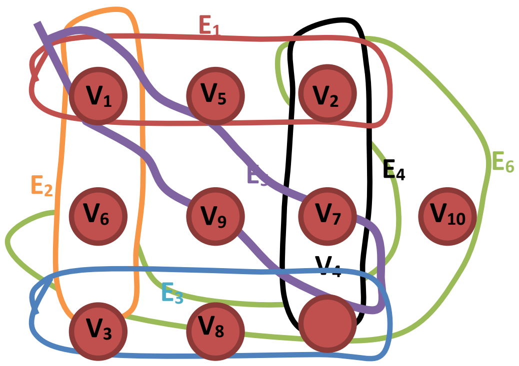


Gambar 1. Graf 3-reguler

Misalkan matriks ketetanggaan dari graf pada Gambar 1 adalah P dan matriks keterkaitannya adalah Q maka menggunakan definisi didapatkan;

$$P = [0\ 1\ 1\ 0\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ \ 0\ 1\ 1\ 0\ ]$$
$$Q = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ ].$$

Tahap ketiga yaitu menerapkan (C3), peneliti menerapkan definisi matriks ketetanggaan pada suatu hipergraf untuk merepresentasikan hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Selanjutnya, peneliti mencari matriks diagonal dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yang entri diagonal utamanya adalah derajat masing-masing titik pada hipergraf tersebut dan 0 untuk entri yang lain. Berikut salah satu contoh hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$,



Gambar 2. Hiper-reguler $C(3,1,4,6)$.

Misalkan S adalah matriks ketetanggaan dari hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$ dan T adalah matriks diagonal dari hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$, dengan menggunakan definisi maka didapatkan:

$$S(C(3,1,4,6)) = \begin{bmatrix} 0\,1\,1\,0\ 1\,1\,1\,1\ 1\,1\,1\,1\ 0\,1\,1\,0\ \ 1\,1\,0\,1\,0\,0\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\ 0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

$$T\big(C(3,1,4,6)\big) = \begin{bmatrix} 6\,0\,0\,6\ 0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\ 6\,0\,0\,6\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 2\,0\,0\,0\,2\,0\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,0\,2\,0\,0\,0\ 0\,0\,0\,2\,0\,0\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,0\ 0\,2\,0\,0\,0\,2 \end{bmatrix}.$$

Secara umum, misalkan Γ adalah graf $k-$reguler, B adalah matriks ketetanggaan dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$, dan D adalah matriks diagonal dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Menggunakan definisi, B dan D dapat dituliskan sebagai berikut:

$$B = [A\,N^T\ \ N^T\ \vdots\ N^t\ \ N\,0\ I\ \vdots\ I\ \ \ N\,I\ \ 0\ \ddots\ \cdots\ \ \ \cdots\ \cdots\ \ \ \ddots\ \ddots\ I\ \ N\,I\ \ \vdots\ I\,0\ \ \ ]$$

dimana;

B: matriks ketetanggaan dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$
(dengan ukuran $(n+lm)\times(n+lm)$)

A: matriks ketetanggaan dari graf Γ (dengan ukuran $n\times n$)

N: matriks keterkaitan dari graf Γ (dengan ukuran $n\times m$, sebanyak l)

N^T: transpos dari N (dengan ukuran $m\times n$, sebanyak l)

0: matriks nol (dengan ukuran $m\times m$, sebanyak l)

I: matriks identitas (dengan ukuran $m\times m$, sebanyak $l-1$)

$$D = \left[\delta_L(v_1)\ 0\ 0\ \delta_L(v_2)\ \ \cdots\ \ \ 0\ \cdots\ \ 0\ \vdots\ \ \ \ \ \ \vdots\ 0\ \ \ \ \ \ 0\ \ \ \ddots\ \vdots\ \cdots\ \delta_L(v_p)\ \right]$$

dimana;

D: matriks diagonal dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$

(dengan ukuran $(n + lm) \times (n + lm)$)

$\delta_L(v)$: derajat masing-masing titik,

$$\delta_L(v) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij,} \quad i \in \{1,2,\cdots,p\}, \quad p = n + lm.$$

Setelah mendapatkan kedua matriks tersebut, peneliti menerapkan definisi matriks Laplace dengan mengurangkan matriks diagonal D dan matriks ketetanggaan B.

Tahap keempat yaitu menganalisis (C4), peneliti menganalisis hasil yang telah diperoleh pada tahap sebelumnya. Misalkan matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ adalah L, maka L dapat dituliskan sebagai berikut;

$$L = [E_{n\times n}\, G_{m\times n} \;\; G_{m\times n} \;\vdots\; G_{m\times n} \;\; F_{n\times m}\, H_{m\times m} \;\; -I \;\vdots\; -I \;\;\; F_{n\times m} \; -I \;\; H_{m\times m}$$
$$\ddots \; \cdots \;\;\; \cdots \; \cdots \;\;\; \ddots \ddots \; -I \;\;\; F_{n\times m} \; -I \;\; \vdots \; -I \; H_{m\times m} \;\;\;]$$

dimana;

E: matriks berukuran $n \times n$ yang entri diagonalnya menyatakan derajat titik-titik utama/ titik-titik dari graf k –reguler yang akan dikembangkan menjadi hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Entri yang lain berkaitan dengan ketetanggaan dari titik-titik pada hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Secara umum matriks E bisa dituliskan sebagai berikut:

$$E = \left\{ \delta_L(v), \quad i = j \quad -1, \quad\quad i \neq j \;\; \text{untuk}\, i,j \in \{1,2,\cdots n\} \right.$$

F: matriks berukuran $n \times m$ yang merupakan negatif dari matriks keterkaitan graf k –reguler. Entri dari matriks F menyatakan ketetanggaan dari titik yang ditambahkan di setiap sisi hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Jumlah matriks F ini sebanyak l yang ditambahkan.

G: matriks berukukuran $m \times n$ yang merupakan transpos dari matriks F. Jumlah matriks ini juga sebanyak l yang ditambahkan.

H: matriks berukuran $m \times m$ yang entri diagonalnya menyatakan derajat dari titik yang ditambahkan di setiap sisi hiper-reguler $C(k,l,n,m)$, sedangkan entri lainnya adalah 0. Secara umum matriks H dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H = [D_{11}\ 0\ 0\ D_{22}\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\ \vdots\ \vdots\ 0\ 0\ \ddots\ \vdots\ \cdots\ D_{m\times m}\ ]$$

dengan bentuk yang lain H dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$H = \begin{cases} \delta_L(v), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ untuk } i,j \in \{1,2,\cdots m\}.$$

-I: negatif matriks identitas berukuran $m \times m$ sebanyak $l - 1$.

Dari hasil penguraian entri dari matriks Laplace di atas, dapat kita analisis bahwa matriks E dan matriks H bisa dituliskan ke dalam bentuk berikut;

$$E_{n\times n} = (\delta_L(v) + 1)I - J$$

$$H_{m\times m} = \delta_L(v)I$$

dimana;

I: matriks identitas berukuran $n \times n$.

J: matriks berukuran $n \times n$ dengan semua entri 1.

Tahap kelima yaitu mengevaluasi (C5), peneliti melakukan evaluasi dengan mencoba pada salah satu hipergraf hiper-reguler yaitu $C(3,1,4,6)$. Menggunakan definisi, didapatkan matriks Laplacenya sebagai berikut;

E **F**

$L(C(3,1,4,6)) = [\ 6\ -1\ -1\ 6\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 6\ -1\ -1\ 6\ -1\ -1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ -$

$1\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ -1\ -1\ -1\ 0\ -1\ -1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ -1\ -1\ 0\ -1\ -$

$1\ 0\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ -1\ -$

$1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ]$

G **H**

Dari matriks di atas bisa kita ketahui bahwa,

1. Pada matriks E memenuhi bentuk sebelumnya yaitu,

$$E_{n\times n} = (\delta_L(v) + 1)I - J$$

Diagonal utama menjelaskan derajat titik utama yang bertetangga dengan 3 titik utama yang lain dan 3 titik hasil penambahan 1 (satu) titik pada setiap sisi graf 3 −reguler sehingga memiliki derajat 6.

Entri yang lain menjelaskan ketetanggaan dari titik-titik utama yang lain.

2. Pada matriks F merupakan negatif dari matriks keterkaitan graf 3 −reguler.
3. Pada matriks G merupakan tranpos dari matriks F.
4. Pada matriks H memenuhi bentuk sebelumnya yaitu,

$$H_{m\times m} = \delta_L(v)I.$$

Diagonal utama menjelaskan derajat dari titik hasil penambahan pada setiap sisi yang bertetanggaan dengan 2 titik utama. Entri yang lain nol.

Sehingga dari evaluasi di atas bisa kita ketahui bahwa bentuk umum dari matriks Laplace di atas sudah bisa diaplikasikan untuk sembarang k, l, n, dan m.

Tahap keenam yaitu mencipta (C6), peneliti mencoba untuk merumuskan bentuk umum matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k, l, n, m)$. Dari hasil sebelumnya maka bentuk matriks Laplace bisa dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$L = [(\delta_L(v) + 1)I_{n\times n} - J_{n\times n}\, G_{m\times n}\;\; G_{m\times n} \;\vdots\; G_{m\times n}\;\; F_{n\times m}\, \delta_L(v)I_{m\times m}\;\; -I$$
$$\vdots\; -I\;\; F_{n\times m}\; -I\;\; \delta_L(v)I_{m\times m}\; \ddots\; \cdots\;\; \cdots\; \cdots\;\; \ddots\, \ddots\; -I\;\; F_{n\times m}\; -I$$
$$\vdots\; -I\; \delta_L(v)I_{m\times m}\;\;],$$

dengan bentuk umum tersebut kita bisa menentukan representasi hipergraf hiper-reguler $C(k, l, n, m)$ dalam matriks Laplace cukup dengan melalui matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya.

Setelah melalui enam tahapan pada keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menemukan bentuk umum dari matriks Laplace pada hipergraf hiper-reguler $C(k, l, n, m)$, dapat dikatakan bahwa keterampilan berpikir tingkat tinggi adalah proses *step-by-step* dimana setiap langkahnya mempengaruhi sekaligus menentukan apa yang akan dilakukan pada langkah berikutnya. Sehingga diperlukan kecermatan dan ketelitian dalam setiap langkahnya.

Pada tahap mengingat, definisi graf reguler menjadi sebuah hal utama karena diperlukan dalam memahami konstruksi sebuah hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Dengan menggunakan definisi graf k −reguler dapat diketahui bahwa konstruksi hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ berkaitan erat dengan k titik yang bertetangga. Hal ini dikarenakan, l titik yang ditambahkan di setiap sisi graf k −reguler memiliki ketetanggaan dengan titik-titik graf k −reguler tersebut. Sehingga pada tahap ini proses mengkonstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ mengarah pada pendekatan matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya.

Pada tahap memahami, telah diketahui bahwa representasi suatu graf ke dalam matriks juga dapat diterapkan pada suatu hipergraf. Oleh sebab itu, mengkonstruksi matriks ketetanggaan dari suatu hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ dapat dilakukan juga sesuai dengan definisi yang ada. Selanjutnya, pendekatan dua matriks yang digunakan pada penelitian ini yaitu matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari suatu graf k −reguler merupakan poin penting karena terbentuk secara berpola pada matriks ketetanggaan dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yang telah dibuat. Sehingga dalam konstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ dapat dilakukan dengan pendekatan yang sama melalui matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −reguler. Matriks Laplace secara definisi adalah pengurangan dari matriks diagonal dan matriks ketetanggaan. Tentunya, sebelum memperoleh matriks Laplace dari suatu hipergraf kita perlu mencari terlebih dahulu matriks ketetanggaan dan matriks diagonal dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Proses pengurangan ini menghasilkan matriks Laplace yang entrinya masih berkaitan dengan matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya.

Pada tahap menerapkan, dengan menerapkan definisi matriks ketetanggaan dan matriks diagonal pada salah satu hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yaitu hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$ didapatkan bahwa matriks ketetanggaan dan matriks diagonalnya memiliki keterkaitan dengan matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya. Setelah itu, matriks Laplace hasil pengurangan dari matriks diagonal dan matriks ketetanggaan menunjukkan bahwa entri-entrinya terdiri atas; matriks ketetanggaan dari graf k −reguler dengan diagonal utamanya merupakan derajat dari titik-titik graf k-regulernya; matriks keterkaitan dari graf k −reguler; matriks identitas; dan matriks persegi dengan entri diagonal utamanya adalah derajat titik-titik yang ditambahkan di setiap sisi graf k −reguler.

Pada tahap menganalisis, setiap entri pada matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ memiliki orde yang berkaitan dengan banyak titik (n) dan banyak sisi (m) dari graf k-regulernya. Hal ini menunjukkan bahwa n berkaitan dengan titik utama/ titik-titik pada graf k-reguler dan m berkaitan dengan titik-titik penambahan di setiap sisi pada graf k −regulernya.

Pada tahap mengevaluasi, menggunakan salah satu hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yaitu hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$ untuk dicari matriks Laplacenya. Menggunakan definisi matriks Laplace, didapatkan bahwa setiap sub matriks yang terbentuk sesuai dengan pola pada bentuk umum dari matriks Laplace yang telah didapatkan sebelumnya. Mulai dari matriks E yang menyatakan matriks ketetanggaan dari graf k −reguler dengan entri diagonal utamanya adalah derajat titik-titik pada graf k −regulernya. Kemudian matriks F yang merupakan negatif dari matriks keterkaitan pada graf k −reguler dan G yang merupakan transposenya. Sedangkan diagonal utama pada matriks H menyatakan derajat dari titik yang ditambahkan di setiap sisi pada graf k −regulernya, nol untuk entri yang lain.

Pada tahap mencipta, bentuk umum dari matriks Laplace yang telah didapat disajikan dalam kombinasi antara derajat titik ($\delta_L(v)$), matriks identitas (I), matriks dengan semua entrinya 1 (J), serta matriks keterkaitan dari graf k −regulernya. Sehingga hal ini mempermudah dalam mengkonstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ yang bisa kita ketahui hanya dengan menentukan matriks ketetanggaan dari graf k −regulernya yang secara otomatis dapat mengetahui derajat masing-masing titiknya, kemudian menentukan matriks keterkaitan dari graf k −regulernya.

Penutup

Berdasarkan hasil penelitian di atas dapat disimpulkan bahwa dengan tahapan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS) peneliti mampu menemukan bentuk umum dari matriks Laplace pada hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Dimulai dari tahap mengingat definisi graf k −reguler, lalu memahami bahwa setiap graf k −reguler dapat direpresentasikan ke dalam matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan. Pada tahap menerapkan yaitu menggunakan definisi untuk menemukan bentuk umum dari matriks ketetanggaan dan matriks diagonal pada hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Tahap menganalisis meliputi memecah matriks Laplace ke dalam sub-sub matriks yang masing-masing ditemukan bentuk umumnya. Tahap mengevaluasi, peneliti menguji salah satu hipergraf hiper-reguler $C(3,1,4,6)$ untuk di cek apakah sesuai dengan bentuk umum yang sudah didapat. Tahap mencipta meliputi merumuskan secara lengkap bentuk umum dari matriks Laplace hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$. Selain itu, dapat disimpulkan juga bahwa mengkonstruksi matriks Laplace dari hipergraf hiper-reguler $C(k,l,n,m)$ dapat diperoleh melalui matriks ketetanggaan dan matriks keterkaitan graf k −regulernya.

Sebagai bahan diskusi, matriks *singless* Laplace dan matriks Seidel masih menjadi salah satu bahan yang menarik untuk dicari bentuk umumnya. Setelah itu, bisa ditentukan bagaimana spektrum dari matriks tersebut apakah menghasilkan nilai eigen bilangan bulat (integral) atau tidak.

Daftar Pustaka

Astuti, Mulia., dkk. (2014). *Non existence of Integral Hypergraph.* Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVI.

Chartrand, G., dan Leniak, L. (2000). *Graphs and Digraphs (3th Edition).* California: Chapman and Hall.

Dewy, Ellita P., dkk. (2015). *Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Keantiajaiban Super Total Selimut Graf Circulant.* Jurnal Kadikma, 6 (3): 122-131.

Hakim, Bahtian R., dkk. (2021). *Analisis HOTS pada Instrumen Penilaian Siswa Kelas IV Sekolah Dasar.* Jurnal Wawasan Pendidikan, 1(2): 246-254.

Maulana, Fajri, dkk. (2018). [Tidak Dipublikasikan]. *Keintegralan dan Konektifitas Aljabar dari Hipergraf Hiper-reguler* $C(k,l,n,m)$. Repository Institut Teknologi Bandung.

Maulana, F., Yuniawati, N.T. (2018). *Students' Problem Solving Ability in Non-routine Geometry Problem.* International Journal of Information and Education Technology, 8(9): 661-667.

Maylisa, Ika N., dkk. (2015). *Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pewarnaan Sisi r-dinamis pada graf khusus.* Jurnal Kadikma, 6(3): 132-141.

Purwanto, Wahyu R., dkk. (2019). *Proses Berpikir Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Perspektif Gender.* Prosiding Seminar Nasional Pascasarjana UNNES, ISSN: 2686-6404.

Putri, Faiq F., dkk. (2020). *Konsep Dasar Hipergraf dan Sifat-sifatnya.* Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika (JMP), 12 (2): 49-62.

Widyastuti, Rany. (2015). *Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika berdasarkan Teori Polya ditinjau dari Adversity Quotient Tipe Climber.* Al Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika, 6 (2): 183-193.