NJME: NURUL JADID JOURNAL OF MATHEMATICS AND ITS EDUCATION
Vol. 1, No. 1, Desember 2024, hal. 15-19
ISSN: -
DOI:-

Idempoten Primitif Skema Asosiasi Grup Dihedral

Nur Hamid, Diana Putri Prahasti*, Ika Fania Putri Mustafa
[1]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Nurul Jadid, Probolinggo, Indonesia
*e-mail: dianaprahasti@gmail.com

Diterima: 3 November 2024 *Revisi: 15 Desember 2024* *Diterbitkan: 31 Desember 2024*

ABSTRAK

Penelitian ini membahas idempoten primitif dalam skema asosiasi grup, khususnya pada grup dihedral. Idempoten primitif merupakan elemen penting yang berkontribusi pada struktur aljabar Bose-Mesner dalam skema asosiasi. Dalam artikel ini, kami mengeksplorasi karakteristik dan sifat elemen idempoten primitif yang dihasilkan dari matriks ketetanggaan grup dihedral dengan orde 1, 2, dan 3. Metode aljabar digunakan untuk menganalisis interaksi elemen-elemen ini, yang menghasilkan subgrup yang relevan dan implikasi penting bagi teori kategori. Temuan penelitian menunjukkan bahwa idempoten primitif memiliki peran signifikan dalam membentuk struktur yang lebih kompleks dalam konteks grup dihedral. Hasil ini memberikan dasar untuk penelitian lebih lanjut dalam memahami struktur algebraik dan aplikasinya di berbagai bidang, termasuk kriptografi dan teori graf. Penelitian ini diharapkan dapat membuka peluang baru untuk eksplorasi lebih mendalam mengenai skema asosiasi dan aplikasi matematisnya.

Kata Kunci: idempoten primitif, grup dihedral, skema asosiasi, teori grup, struktur aljabar.

ABSTRACT

Primitive idempotents in the association schemes of dihedral groups are significant concepts extensively applied in various fields, such as combinatorics and algebra. This study explores the characteristics and properties of primitive idempotents within the context of dihedral groups of orders 1, 2, and 3. By employing algebraic methods and analyzing the interactions among these elements, we establish a foundation for forming more complex structures. The research highlights the relationships between primitive idempotents and the generated subgroups, emphasizing their implications for category theory. The findings pave the way for further investigations into algebraic structures and their potential applications in cryptography and graph theory, ultimately contributing to a deeper understanding of association schemes in group theory.

***Keywords**: primitive idempotents, dihedral groups, association schemes, group theory, algebraic structures.*

**Corresponding author*

1. PENDAHULUAN

Skema asosiasi adalah sebuah konsep yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kombinatorial. Menurut Paul [1] skema asosiasi memiliki bentuk yang elegan untuk meneliti tentang kode, desain, grup, geometri terbatas, dan topologi. Dengan berbagai manfaat yang diberikan oleh skema asosiasi diberbagai bidang, banyak peneliti yang terus mengkaji lebih dalam lagi tentang skema asosiasi. Seperti penelitian yang dilakukan oleh [2] yang mengkaji tentang skema asosiasi pada grup$PSL(2,7)$, A_6, dan S_6, [3] mengkaji tentang skema aosiasi grup S_5dan A_5, [4] mengkaji tentang skema aosiasi grup atas Z_3, [8] menkaji tentang grub simetris sym[7], dan mengkaji tentang skema aosiasi grup$C_n \rtimes C_2$

Skema asosiasi yang sering digunakan adalah skema asosiasi grup ([2], [3], [4], [6], [7]. dan [8]). Pada skema asosiasi grup, langkah pertama yang perlu dilakukan yaitu mengelompokkan grup berdasarkan kelas-kelas konjugasi yang didapatkan. Dari kelas konjugasi tersebut, matriks ketetanggaan dapat ditemukan. Matriks tersebut kemudian menjadi basis dari suatu aljabar yang dinamakan aljabar Bose-Mesner. Penjelasan lebih detail dapat dilihat di [2], [4].

Pada artikel ini, akan diberikan basis pada aljabar Bose-Mesner dari skema asosiasi grup yang berasal dari idempoten primitif. Penjelasan tentang skema asosiasi grup dapat dilihat pada [1], [2], [3], [4]. Grup yang akan digunakan yaitu grup Dihedral orde 1, 2, dan 3. Pada artikel [7] sudah dikaji tentang skema asosiasi grub dihedral, namun tidak diberikan hasil dari idempoten primitifnya. Pada artikel ini akan dibahas tentang idempoten primitif pada grub dihedral dengan mengambil hasil matriks M dengan entri-entrinya merupakan bilangan bulat. Penjelasan tentang grup dihedral dapat dilihat di [5]. Alat yang digunakan Untuk komputasi adalah SageMath.

2. METODE

Pada bagian awal artikel ini, terdapat definisi dari skema asosiasi grup. Grup G yang digunakan adalah grup matriks dihedral 1, 2, 3, 4 dan 6. Banyaknya anggota dari grup G adalah $|G_1| = 2$, $|G_2| = 4$, dan $|G_3| = 6$.

Definisi 1 *Misalkan* G *adalah sebuah grup berhingga, dan* $\{e\} = C_0, C_1, \dots, C_d$ *merupakan kelas-kelas konjugasi dari* G *dengan* e *adalah elemen identitas dari* G. *Didefinisikan suatu relasi* $R_i(i = 0,1, \dots, d)$ *pada* G *sebagai*

$$(x, y) \in R_i \Leftrightarrow yx^{-1} \in C_i$$

Pasangan $(G, R_i)_{0\leq i\leq d}$*merupakan skema asosiasi kelas* d *yang disebut skema asosiasi grup dari* G.

Selanjutnya, dibentuk matriks-matriks A_i yang didefinisikan sebagai

$$A_i = \begin{cases} 0 & jika\ (x,y) \in R_i, \\ 1 & selainnya, \end{cases}$$

Matriks-matriks tersebut memenuhi

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} P_{i,j}^{k} A_k$$

Matriks-matriks $A_0, A_1, \dots, A_d$ dinamakan matriks ketetanggaan dan membentuk suatu basis dari suatu aljabar yang dinamakan *aljabar Bose-Mesner A*. Aljabar A ini memiliki bilangan yang disebut *bilangan irisan* yang diberikan oleh

$$|\{(x,y) \in C_i \times C_j | x, y = z, z \in C_k\}|$$

Setelah definisi aljabar Bose-Mesner diberikan, selanjutnya dituliskan urutan kelas-kelas konjugasi yang digunakan dalam artikel ini. Grup yang digunakan adalah grup dihedral orde 1, 2, dan 3 dan dinotasikan dengan D_i dengan $i = 1,2,3$.

1. D_1

	C_0	C_1
rep.	(1)	(12)
$C_i \vee$	1	1

2. D_2

	C_0	C_1	C_2	C_3
rep.	(1)	(34)	(12)	(12)(34)
$C_i \vee$:	1	1	1	1

3. D_3

	C_0	C_1	C_2
rep.	(1)	(12)	(123)
$C_i \vee$:	1	3	2

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah-langkah yang dilakukan untuk memperoleh hasil pada bagian ini mengacu referensi yang disebutkan pada bagian Pendahuluan. Yang pertama dilakukan untuk memperoleh hasil adalah dengan menemukan matriks-matriks ketetanggaan dari skema asosiasi yang dikaji. Adapun matriks-matriks ketetanggaan yang diperoleh untuk masing-masing grup adalah sebagai berikut.

1. D_1

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

2. D_2

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

3. D_3

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Dari matriks tersebut, diperoleh nilai $t_{i,j}^k$ dari persamaan

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{s} t_{i,j}^k A_k \quad t_{i,j}^k \in \mathbb{Z}$$

Nilai $t_{i,j}^k$ yang diperoleh

1. D_1

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

2. D_2

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

3. D_3

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Selanjutnya, bilangan-bilangan $t_{i,j}^{k}$ disusun ulang menjadi matriks B_i yang didefinisikan sebagai

$$(B_i)_{j,k} := t_{ij}^{k}$$

dengan $i = 0,1, \dots, d$.

Matriks-matriks B_i merupakan komutatif [3], sehingga matriks-matriks tersebut dapat didiagonalkan secara simultan oleh suatu matriks P. Dengan kata lain, untuk $i = 0,1, \dots, d$, dapat dituliskan i = 1, . . . s, sehingga

$$P^{-1} B_i P = \begin{pmatrix} v_1(i) & & \\ & \ddots & \\ & & v_s(i) \end{pmatrix}$$

Kemudian, ditentukan matriks $M = \big(v_i(j)\big)$. Sehingga diperoleh matriks M untuk masing-masing grup adalah sebagai berikut.

1. D_1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. D_2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. D_3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks M yang diperoleh kemudian digunakan untuk mendapatkan basis dari idempotent primitif yang dinotasikan dengan $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$. Dalam hal ini, elemen-elemen tersebut disebut idempotent primitif karena memenuhi

$$\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i \neq 0, \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} \varepsilon_i, 1_A = \sum_{i=0}^{d} \varepsilon_i.$$

Basis dalam bentuk idempoten primitif dari A dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan

$$(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d) = (A_0, \dots, A_d) M^{-1} \tag{1}$$

Dengan menggunakan persamaan (1), diperoleh hasil berupa idempoten primitif sebagai berikut.

1. Untuk D_1

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$$

2. Untuk D_2

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

3. Untuk D_3

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right]$$

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dianalisis konsep idempoten primitif dalam konteks skema asosiasi grup. Ditemukan bahwa idempoten primitif memainkan peran penting dalam struktur grup, memungkinkan identifikasi elemen yang mempertahankan sifat tertentu di bawah operasi grup. Melalui penerapan skema asosiasi, dapat dipahami bagaimana elemen idempoten berinteraksi dan berkontribusi pada formasi grup yang lebih kompleks. Penelitian ini juga menunjukkan relevansi idempoten primitif dalam berbagai aplikasi matematis serta implikasinya dalam teori grup dan bidang terkait lainnya. Dengan demikian, pemahaman yang lebih mendalam tentang idempoten primitif tidak hanya memperkaya teori grup, tetapi juga membuka peluang untuk pengembangan penelitian lebih lanjut dalam struktur aljabar.

REFERENSI

[1] P. Terwilliger, “The Subconstituent Algebra of an Association Scheme, (Part I),” *Journal of Algebraic Combinatorics 1*, no. 1, pp. 363–388, Jun. 1992.

[2] N. Hamid and M. Oura, “Terwilliger Algebras of Some Group Association Schemes,” *Faculty of Mathematics and Science, Graduate School of Natural Science and Technology.*, pp. 1–6.

[3] jose maria P.Balmaceda and manabu Oura, “the terwilliger algebras of the group association schemes of S5 adn A5,” *department of mathematics*, pp. 1–10.

[4] N. Hamid, C. Guswita, S. Islam, and M. F. N. Ni’am, “IDEMPOTEN PRIMITIF SKEMA ASOSIASI GRUP UNTUK MATRIKS GRUP ATAS Z_3,” *JKMA*, vol. 2, no. 2, p. 21, Jun. 2021, doi: 10.17977/um055v2i22021p21-25.

[5] keith conrad, “DEHIDRAL GROUPS,” pp. 1–9.

[6] A. Herman, R. Maleki, and A. S. Razafimahatratra, “On the Terwilliger algebra of the group association scheme of the symmetric group $\operatorname {sym}(7)$,” Nov. 13, 2024, *arXiv*: arXiv:2411.08803. doi: 10.48550/arXiv.2411.08803.

[7] E. Bannai and A. Munemasa, “THE TERWILLIGER ALGEBRAS OF GROUP ASSOCIATION SCHEMES,” *Kyushu J. Math.*, vol. 49, no. 1, pp. 93–102, 1995, doi: 10.2206/kyushujm.49.93.

[8] A. Herman, R. Maleki, and A. S. Razafimahatratra, "On the Terwilliger Algebra of the Group Association Scheme of the Symmetric Group Sym(7)," arXiv:2411.08803v1 [math.CO], Nov. 13, 2024.